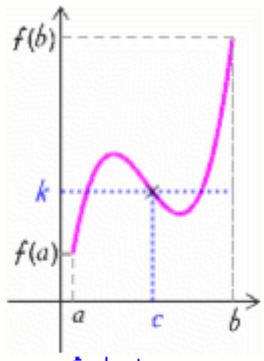
V. Image d'un intervalle par une fonction continue

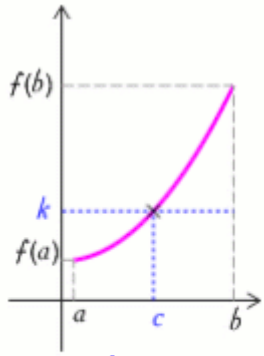
Activité 1 page 12.

Théorème :
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires :
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.
Soient $a \in I$ et $b \in I$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$
On peut aussi l'exprimer sous la forme :
L'équation $f(x) = k$ a au moins une solution c comprise entre a et b.
En particulier, si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a,b[$.
Si de plus f est strictement monotone sur I, alors c est unique.



f n'est pas strictement monotone



f est strictement monotone

Activités 4 et 5 page 13.

Conséquence :
Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Si f ne s'annule en aucun point de I alors elle garde un signe constant sur I.

Exercice :
Etudier le signe de $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3x}$ sur son domaine de définition.

Image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue :
Activité 7 page 15.

Théorème :
Si f est continue sur $[a,b]$ alors $f([a,b]) = [m,M]$
Où m est le minimum de f sur $[a,b]$ et M est le maximum de f sur $[a,b]$.

Cas des fonctions monotones :

Théorème :
* Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a,b[$ (b fini ou infini).
  Si f est croissante et majorée alors f possède une limite finie en b.
  Si f est croissante et non majorée alors f tend vers $+\infty$ en b.
* Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $]a,b]$ (a fini ou infini).
  Si f est décroissante et minorée alors f possède une limite finie en a .
  Si f est décroissante et non minorée alors f tend vers $-\infty$ en a.

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn